LE PRÉCIEUX MIROIR DES QUATRE ÉLÉMENTS

Par L. VANHÉE, S. J.

Tchou Che-kié publia vers 1303 son algèbre à 4 inconnues, décorée du nom fleuri de „*Précieux miroir des quatre éléments*". L'ouvrage, outre une espèce d'introduction fort intéressante, est divisé en trois chapitres qui contiennent 288 problèmes, dont plusieurs très compliqués. Le *Précieux Miroir* fut perdu toute une longue série d'années. Yuen Yuen (1764—1849) au moment où il commençait ses *Biographies de Mathématiciens* n'avait pas encore réussi à le retrouver. En 1802, Lou Ming-hiang 羅茗香 plus heureux[1] découvrit enfin un vieil exemplaire, qu'il se mit à étudier avec une ardeur soutenue. En 1836, par la protection et sous le patronage de l'illustre Yuen, parut le premier fruit des ses longs travaux: *le précieux miroir avec explications détaillées* 四元玉鑑細草. La même année, Lo donnait un ouvrage spécial en 24 fascicules intitulé 四元釋例 *Explications et règles de l'algèbre quadrilittérale*, qui dénotent un travailleur infatigable et consciencieux. Ting, dans son recueil[2], fit une place d'honneur au texte retrouvé et corrigé par de si habiles mains: il publia l'ouvrage de Tchou dans son entier, sans aucune note postérieure[3].

Dans la postface[4] Ting Ts'iu-tchong s'exprime ainsi: „Tchou ne donne au début de son livre que la solution de 4 problèmes à 1, 2, 3, et 4 inconnues, pour indiquer la marche générale. Dans l'explication de tous les problèmes il se contente de dire *d'après le* jou-tsi 如積. C'est qu'il voulait faire des 4 solutions données la règle pour résoudre toutes les questions. Malheureusement les

1 Vers 1835 il découvrit encore un exemplaire du premier grand ouvrage de Tchou, le 算學啓蒙 Souan-hiao-k'i-mong réimprimé en Corée vers 1660.

2 Cf. *Bibliotheca Mathematica Sinensis Péfou* par L. Vanhée S. J., *T'oung-pao* 1914. I, pp. 111 seq.

3 En appendice seulement se trouve une esquisse d'explication par Hoang Yu-p'ing.

4 Datée de Koang-siu 2 année, 1874.

explications sont très concises. A l'époque où vivait l'auteur, nombreux étaient ceux qui employaient sa méthode et tous en comprenaient la théorie. Il était donc inutile de l'expliquer au long et au large. Mais plus tard, les amateurs diminuant, la théorie fut oubliée et la méthode se perdit. Sous les Ming on n'y comprenait plus rien. Tels T'ang King-tch'oen[1] et Kou Tchou-K'i[2] qui ne saisirent pas le sens de l'expression jou-tsi." Ting ajouta qu'il a pris le texte de Lo Ming-hiang 羅茗香 comme base, et a prié son ami Hoang Yu-p'ing 黃玉屏 d'expliquer en détail les solutions originales de Tchou[3]. Tchou, dans une espèce d'introduction donne quatre tableaux, avec quelques lignes d'explications trop concises. Ce sont par ordre:

1. Vieux tableau pour élever jusqu'à la 8ᵉ puissance
2. Tableau des 4 éléments au carré $(a + b + c + d)^2$
3. Tableau des 5 sommes au carré $(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5)^2$
4. Tableau des 5 différences au carré $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^2$

Pour comprendre l'auteur, nous allons donner les notions strictement nécessaires.

Prenons le triangle rectangle historique dont les côtés sont égaux à 3, 4, 5.

Inscrivons-y un cercle et soit *d* le diamètre La terminologie chinoise sera la suivante:

$a =$ hypothénuse 弦
$b =$ *hauteur* 股
$c =$ base 句
$d = [(b + c) - a] =$ *valeur jaune* 黃方

Les côtes a, b, c, forment entre elles 5 *sommes* et 5 *différences*, données plus bas.

Et dans son algèbre, les 4 élements 天 *t'ien*, 地 *ti*, 人 *jen*, 物 *ou* correspondront presque toujours à

$a =$ 人 *jen*	= hypothénuse		$= z$
$b =$ 地 *ti*	= hauteur		$= y$
$c =$ 天 *t'ien*	= base		$= x$
$d =$ 物 *ou*	= l'inconnue du problème		$= u$

1 Alibi T'ang Choen-tche.

2 Encore appelé Kou Ying-hiang.

3 Ces détails sont donnés ici pour rétablir exactement la part qui revient à chacun, et corriger ainsi des erreurs qui traînent à droite et à gauche dans mainte publication.

Il va sans dire que le *d* qui représente dans les tableaux le diamètre du cercle inscrit, varie à l'infini dans les problèmes et peut indiquer toute inconnue à rechercher.

On remarquera que le système de Tchou est clair, symétrique, mais lourd et encombrant. Pour qui voudra parcourir ses œuvres, il n'y a pas de doute possible: nous sommes en présence d'une méthode neuve et intéressante.

Vieux tableau pour élever jusqu'a la 8ᵉ puissance.

					1						
Pour l'extraction	1p.	1	1	1h.							Les termes entre les
regarder	2p.	1	2	1	2h.						deux extrêmes
de	3p.	1	3	3	1	3h.					tous lien (2)
travers (1)	4p.	1	4	6	4	1	4h.				
	5p.	1	5	10	10	5	1	5h.			
	6p.	1	6	15	20	15	6	1	6h.		
	7p.	1	7	21	35	35	21	7	1	7h.	
	8p.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	8h.
		A	1	2	3	4	5	6	7	8	

Les chiffres à gauche du tableau traduit correspondent à des expressions techniques, qui indiquent le degré du polynôme. Pour ne pas induire en erreur, j'ai noté: 1 *puissance*, 2ᵈᵉ . . . 8ᵉ. Mais le chinois est différent, voici la correspondance:

1ᵉʳᵉ	puissance	Dividende et diviseur 商實
2	—	Carré 正方積
3	—	Cube 立方
4	—	3ᵉ produit 三乘積
5	—	4ᵉ — 四乘積
6	—	5ᵉ — 五乘積
7	—	6ᵉ — 六乘積
8	—	7ᵉ — 七乘積

En d'autres termes x n'est pas considérée comme puissance, elle est appelée *chang-che* diviseur-dividende. Il s'énsuit que dans les algébristes chinois les expressions si fréquentes de „Extrayez la racine 3ᵉ produit, ou 4ᵉ produit, ou 5ᵉ produit" doivent se traduire par „Extrayez la racine 4ᵉ, 5ᵉ, 6ᵉ" et non pas „Extrayez la racine 3ᵉ, 4ᵉ, 5ᵉ". Quand le chinois porte „Extrayez la racine n", il faut traduire „Extrayez la racine n + 1".

La même remarque s'applique aux expressions spéciales qui désignent le terme le plus élevé du polynôme. La liste des correspondances dispensera de plus longues explications

方法	x	
平方隅	x^2	terme extrême (au coin) du carré
立方隅	x^3	— du cube
三乘隅	x^4	— du 3ᵉ produit
四乘隅	x^5	— du 4ᵉ —
五乘隅	x^6	— du 5ᵉ —
六乘隅	x^7	— du 6ᵉ —
七乘隅	x^8	terme extrême du 7ᵉ produit.

Outre les termes des extrêmes désignés ainsi les uns par 積 et les autres par 隅, tous les autres s'appellent *lien* 廉. La correspondance pour la 8ᵉ puissance fera saisir le système.

本積	Terme absolu
方法	1ᵉʳ terme de l'inconnue
上廉	2ᵉ terme
二廉	3ᵉ terme
三廉	4ᵉ terme
四廉	5ᵉ terme
五廉	6ᵉ terme
六廉	7ᵉ terme
七廉	8ᵉ terme de l'inconnue
七乘隅	terme le plus élevé de la 8ᵉ puissance.

Supposons qu'un polynôme ait 4 termes, les dénominations seront:

1ᵉʳ terme	積	
2ᵉ terme	上廉	m. à m. terme intérieur supérieur
3ᵉ terme	下廉	— terme intérieur inférieur
4ᵉ terme	隅	

Le carré des 4 éléments.

Les 4 éléments dont il s'agit, sont dans un triangle rectangle l'hypothénuse a ou z, la hauteur b ou y, la base c ou x et la *valeur jeune* (b + c — a) c. à. d. le diamètre d du cercle inscrit ou u.

Carré de $(a + b + c + d)$

Tchou donne la note concise que voici:

„Pour se servir des 4 éléments il faut avant tout saisir la théorie Il faut comprendre à fond la méthode pour multiplier et diviser, monter et descendre, avancer et reculer. C'est vraiment une science profonde qui va jusqu'aux arcanes. J'ai pris pour la base la valeur 3, pour la hauteur 4 et pour l'hypothénuse 5, enfin pour la *valeur jaune*, 2. La somme des 4 éléments donne:

	1	
1	t	1
	1	

$$= \begin{matrix} x + y + z + u \\ c + b + a + d \end{matrix}$$

Leur carré prendra la forme suivante:

		1		
	2	o	2	
1	o	t^2	o	1
	2	2y	2	
		1		

$$= \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + \\ 2xy + 2xz + 2xv + \\ 2yv + 2yz + 2zv \end{matrix}$$

En tout 16 termes[1], dont la valeur totale est de 196 pas. Un coup d'œil attentif jeté sur le tableau fera comprendre clairement la système."

Tableau de $(a + b + c + d)$.

Les carrés a^2, b^2, c^2, d^2 sont alignés sur la diagonale principale. Les autres termes ab, ac, ad, bc, bd, cd, sont disposés symétriquement autour de cet axe oblique. Ainsi les ab se trouvent aux coins inférieur gauche et supérieur droit, les ac et ad juste à côté.

Les lignes grasses divisent le polynôme décrit géométriquement en ses différents termes; les lignes plus minces forment de petits carrés dont le nombre est égal à la valeur de chaque terme.

1 L'auteur entend les termes semblables réunis p. e. 2xy, 2xz, comme autant de termes qu'il y a d'unités dans le coefficient. De cette façon $(x + y + z + v)^2 = 16$ termes.

		4	5		
	b^2	bc	bd	ab	1
4	bc	c^2	cd	ac	2
5	bd	cd	d^2	ad	3
	ab	ac	ad	a^2	
	1	2	3		

Ainsi:

$a^2 = 5^2$	$ab = 5.4$	$bd = 4.2$
$b^2 = 4^2$	$ac = 5.3$	
$c^2 = 3^2$	$qd = 5.2$	
$d^2 = 2^2$	$bc = 4.3.$	

Soit au total 190.

Ce tableau semble bien d'origine chinoise. L'auteur donne le développement complet des 16 termes. Il n'a pas même pensé au moyen de faire une légère synthèse des 6 termes semblables et de les écrire soit $2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$ soit $2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$.

La seule question à résoudre est la suivante.

Sont-ce les Hindous et les Arabes qui l'ont livré aux Chinois ou ceux-ci l'ont-ils inventé ou du moins perfectionné? J'incline vers la première hypothèse, sans toutefois rejeter la probabilité de la seconde.

Tableau des 5 sommes au carré.

"La théorie du triangle rectangle, dit *Tchou*, a son pointde départ dans le cercle et le carré. Si le diamètre vaut 1, la circonférence sera 3 et si le côté du carré vaut 1, son périmètre sera 4. Développons la circonférence pour en faire la base du triangle rectangle, et étendons le périmètre pour en faire la hauteur. Les deux lignes faisant un angle droit entre elles, joignons leurs sommets par l'oblique: elle vaudra justre 5. Telle est la genèse du triangle rectangle.

Les 5 sommes dont il s'agit sont:

1	*Kiu-kou-houo* 句股和	$b + c$
2	*Kiu-hien-houo* 句弦和	$a + c$

3 *Kou-hien-houo* 股弦和 a + b
4 *Hien-houo-houo* 弦和和 a + b + c
5 *Hien-kiao-houo* 弦較和 a + b — c

Le total des 5 s est égal à 42 pas. Le carré est de $42^2 = 1764$ pas. Le polynôme algébrique comprend 25 termes."

Sur la diagonale principale sont disposés les carrés dans l'ordre suivant:

1. $(a + b + c)^2$
2. $(a + b)^2$
3. $(a + c)^2$
4. $(b + c)^2$
5. $(a + b — c)^2$

Les 20 autres termes sont arrangés dans des carrés et rectangles placés symétriquement autour de l'axe oblique.

Tableau des 5 differences au carré.

"Dans le calcul des éléments, le point le plus admirable est le développement des termes; les arcanes du *jou-tsi* sont on ne peut plus profonds dans la connaissance des tableaux; mais les difficultés du système sont rarement pénétrées par les élèves. Après avoir expliqué les 5 sommes, nous allons éclaircir la théorie des 5 différences.

Les 5 différences sont:

1. b — c 句股較
2. a — c 句弦較
3. a — b 股弦較
4. a — (b — c) 弦較較
5. (b + c) — a 弦和較

Le total des 5 différences est égal à 10 pas, comme valeur numérique. Le carré est $10^2 = 100$ pas. Les termes du développement algébrique sont au nombre de 25. Un coup d'œil attentif sur le tableau ci-joint le fera voir clairement: "

L'auteur dispose les carrés suivant la diagonale principale dans l'ordre suivant

1. $[a — (b — c)]^2$
2. $[(b + c) — a]^2$
3. $(a — c)^2$
4. $(a — b)^2$
5. $(b — c)^2$.

Les 20 autres termes sont arrangés symétriquement d'après la méthode expliquée plus haut. Carrés et rectangles divisés en petits carrés donnent la valeur numérique de chaque terme. Après ces 4 tableaux vient le texte pour la solution des problèmes à 1, 2, 3, 4 inconnues.

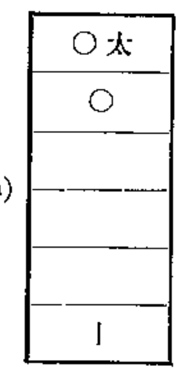
Problème à une inconnue 一氣混元

Si le diamètre du cercle inscrit, multiplié par le rectangle construit sur les deux petits côtés, donne pour produit 24 pas, et que l'on ajoute seulement "la somme de l'hypothénuse et de la hauteur vaut 9 pas", trouver la longueur de la base?

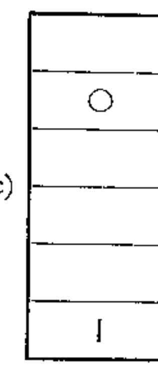
Réponse: 3 pas.

Solution detaillée. Posons le T'ien-yuen égal à la base; par le calcul du *jou-tsi*, nous trouvons l'expression (a) de 62 diamètres multipliant le rectangle; puis prenant 162 deux fois la surface donnée (b) et réduisant, nous obtenons l'expression (c) dont il faut extraire la racine; enfin la racine 5^e donne 3 pas pour la base, réponse exacte (d)

(a)



(c)



Tel est le texte abscons du 1^er problème et de sa solution. Quatre opérations sont indiquées, nous les avons marquées (a), (b), (c), (d). Deux expressions algébriques seulement sont écrites en colonnes (a) et (c).

Il faudrait en conclure qu'au commencement du XIII^e siècle, les calculateurs ordinaires — car c'est pour eux que Tchou écrit, le maître pour les élèves — connaissaient les diverses manipulations exigées. Quelques jalons, quelques points de repère leur suffisaient.

Des mathématiciens modernes ont essayé de restaurer toute la trame des raisonnements et des calculs. Dans la *Bibliotheca mathematica Pé-fou* se trouve une de ces reconstructions. C'est celle de Hoang Yu-p'ing.

Nous allons la reproduire, mais en nous servant de la notation moderne partout où elle ne nuira pas à l'originalité du système. Pour plus de clarté nous donnons d'abord les deux expressions algébriques (a) et (b).

(a)

		soit	
○太	0 t		0
○	0		0x
	729		$729x^2$
	—81		$-81x^3$
	—9		$-9x^4$
丨	1		$1x^4$

$x^1 - 9x^4 - 81x^3 + 729x^2 + 0x$ [= 162 d b c]

(b)

		soit	
	—3888		—3888
0	0		0x
	729		$729x^2$
	—81		$-81x^3$
	—9		$-9x^4$
丨	1		$1x^1$

$x^5 - 9x^4 - 81x^3 + 729x^2 + 0x - 3888$ [= 0]

太
0
1

Posons *t'ien* = la base cherchée.

x^2 sera son carré. Si nous divisons x^2 par les 9 pas, somme de l'hypothénuse et de la hauteur, le quotient sera la difference entre l'hypothénuse et la hauteur[1].

1 Evident car $x^2 = a^2 + b^2 = (a + b)(a - b)$, donc $(a + b (a - b)$: $a + b = (a - b)$.

N'effectuons pas la division, mais posons: $x^2 = 9(a - b)$.

Des 9 bases retranchons $9(a - b)$, nous obtiendrons 9 diamètres du cercle inscrit[1]. Si de $9 \times 9 = 81$ pas la valeur de $9(a + b)$ l'on retranche $9(a - b)$, l'on obtient $18b^2$, soit

81	
0	$-x^2 + 81$ [2]
—1	

Multipliant ces 18 b par x il vient

t	
81	$-x^3 + 0x^2 + 81x$
0	
—1	

Valeur de 18 rectangles construits sur les petits côtés b et c. Multipliant par 9 fois le diamètre du cercle inscrit, nous obtenons[3]:

	t	
	0	
	729	
(a)	—81	$= x^5 - 9x^4 - 81x^3 + 729x^2$
	—9	
	+1	

1 Car le diamètre $= (b + c - a)$ donc $9c - (9a - b) = 9(b + c - a)$ ou $9x - x^2$.

2 Se rappeler que $9(a - b) = x^2$ donc $-x^2 + 81 = 9(a + b) - 9(a - b) = 9a - 9a + 9b + 9b = 18b$.

3 9 fois le diamètre $= (9x - x^2)$
Les 18 rectangles $= (-x^3 + 81x)$
donc $= (9x - x^2)(-x^3 + 81x) = x^5 - 9x^4 - 91x^3 + 729x^2$.

C'est la valeur de 162 diamètres qui multiplient la surface du rectangle[1].
Mettons cette expression à gauche[2].

Prenons ensuite 162 fois le produit donné[3] 42 soit 3888 pour valeur équivalente.

Combinons[4] avec la *gauche* et nous obtenons l'égalité finale sur laquelle doit porter l'extraction de la racine.

(c)

—3888
0
729
—81
—9
1

$$x^1 - 9x^4 - 81x^3 + 729x^2 + 0x - 3888\ [= 0]$$

Problème à 2 inconnues 兩儀化元

Si le carré de la hauteur diminué de $a - (b - c)$ égale le produit de la hauteur par la base et que $c^2 + (a + b - c)$ soit égal au produit de la base par l'hypothénuse, que vaut la hauteur ?

Réponse: 4 pas.

Solution. Posons l'élément *ciel* pour la hauteur et l'élément *terre* pour la base plus l'hypothénuse. En combinant les deux inconnues pour la recherche nous obtiendrons l'expression (*Kin*)

(*Kin*)

—2	0	t
—1	2	0
	2	0
		1

$$x^3 + 2x^2y + 2xy - y^2x - 2y^2$$

(*Yun*)

2	0	t
—1	2	0
0	0	0
0	0	1

$$x^2 + 2xy - y^2x + 2x^2$$

Puis nous trouverons l'expression (*yun*).

1 Le signe = n'existe donc pas, cette phrase le remplace; l'équation entière serait donc: $x^5 - 9x^4 - 81x^3 + 729x^2 = 162\,dbc$.

2 *A gauche, à droite*, indiquent la place des colonnes qui doivent être mises face à face. 3 Le produit donné 24 = le rectangle bc multiplié par le diamètre.

4 *Combiner, réduire, simplifier*. Ici de fait écrire f (9) — f (d) = 0.

Solution détaillée de Hoang.

Posons *t'ien* égal à la hauteur; et *ti* = la base plus l'hypoth. Le carré de *t'ien* sera le carré de la hauteur. Retranchon *t'ien* de *ti*, le reste sera $a - (b - c)$

t
1

$x = b$

1	t

$y = (a + c)$

t
0
1

$= x^2$

1	t
	—1

$y - x = a - (b - c)$

Retranchons $(y - x)$ du carré de la hauteur; nous obtiendrons (1) c. à d. la valeur de la base multipliée par la hauteur. En divisant par la hauteur l'expression (1), nous obtenons l'expression (2) équivalente à la base

(1)

—1	t
	1
	1

$x^2 + x - y$

(2)

—1	0
	1t
	1

$x + 1 - \frac{y}{x}$

En retranchant cette base de l'inconnue ti le reste est la valeur de l'hypothénuse (3). L'hypothénuse au carré est de la forme (4).

(3)

1	0
1	—1t
	—1

$y + \frac{y}{x} - x - 1$

(4)

1	0	0
1	—2	0
2	—4	1t
	—2	2
		1

$$x^2 + 2x + 1 - 2xy - 4y - 2\frac{x}{y} + y^2 + \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

Le carré de la base sera (5).

Additionnant les carrés de la base et de la hauteur il vient (6)

(5)

1	0	0
	—2	0
	—2	1t
		2
		1

$x^2 + 2x + 1 - 2y - 2\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

(6)

1	0	0
	—2	0
	—2	1t
		2
		2

$2x^2 + 2x + 1 - 2y - 2\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

Retranchant le carré de l'hypothénuse (4) des carrés de la base et de la hauteur (6) il reste l'expression (*Kin*)

$$(Kin) = x^3 + 2x^2y + 2xy - 2xy - xy^2 - 2y^2.$$

Ensuite, divisant le carré de la hauteur par *ti* (a + c) nous trouvons l'expression (7) qui équivaut à la différence entre l'hypothénuse et la base (a — c)

(7)

t	0
0	0
0	1

$\frac{x^2}{y}$

(8)

1	t	0
	0	0
	0	1

$\frac{x^2}{y} + y$

(9)

1	t	0
	0	0
	0	—1

$y - \frac{x^2}{y}$

En y ajoutant *ti* (base + hypothénuse) il vient l'expression (8) soit 2 hypothénuses[1].

Retranchant (a — c) de *ti* (a + c) nous obtenons (9) soit 2 bases.

Multipliant les 2 bases (9) par les deux hypothénuses (8) nous trouvons (10) soit 4 bases qui multiplient l'hypothénuse. Elevant les 2 bases au carré il vient (11) ou 4 bases carrées.

1 Evident car $b^2 = a^2 - c^2$ d'après le théorème de Pythagore.

$$= (a - c)\,(a + c) \text{ donc } \frac{b^2}{(a + c)} = (a - c)$$

de même: (a — c) + (a + c) = 2a ou 2 hypothénuses. Mais ces décompositions

(10)

1	0	t	0	0
				0
				0
				0
				—1

$y^2 - \frac{x^4}{y^2}$

(11)

1	0	t	0	0
0	0	0	0	0
		—2	0	0
		0	0	0
		0	0	1

$y^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{y^2}$

La somme de *ti* et *t'ien* donne (12) égale aux trois côtes[1]. Diminuant (12) de la double base (9) il reste (13) égal à (a + b — c)

(12)

1	t
	1

$y + x$

(13)

t	0
1	0
	1

$x + \frac{x^2}{y}$

Quadruplant (13) nous trouvons (14) égal à 14 (a + b — c). Si nous y ajoutons les $4c^2$ de (11) le résultat est (15)

(14)

t	0
4	0
	4

$4x + \frac{4x^2}{y}$

(15)

1	0	t	0	0
		4	0	0
		—2	4	0
				0
				1

$y^2 - 2x^2 + 4x + \frac{4x^2}{y} + \frac{x^4}{y^2}$

étaientelles familières à **Tchou**, comme le supposent, les commentateurs modernes, guidés par l'algèbre Européenne ?

1 Ti = a + c et *t'ien* = b, donc *ti* + *tien* = a + b + c.

Égalant (10) et (15) nous obtenons[1] l'expression (16) et simplifiant[2], l'expression (yun)

(16)

t	0	0
4	0	0
—2	4	0
		0
		2

$$-2x^2 + 4x + \frac{4x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^2}$$

(*yun*)

2	0	t
—1	2	0
		0
		1

$$x^3 + 2xy - xy^2 + 2y^2$$

Retranchant (yun) de (Kin) nous obtenons (2d) qui simplifié donne

(d) *à droite*

(2d)

—4	t
	0
	2

$$2x^2 - 4y$$

(d)

—2	t
	0
	1

$$x^2 - 2y$$

Combinant avec (Kin) nous trouvons g

(g)

2	t
1	—4
	—2

$$-2x^2 - 4x + xy + 2y$$

Mettons (d) et (g) face à face sur colonnes parallèles

(g)

e	i
2	t
1	—4
	—2

$$-2x^2 - 4x + xy + 2y$$

(d)

i	e
—2	t
	0
	1

$$x^2 - 2y$$

1 Se rappeler la donnée du problème, $a + b - c + c^2 = ac$, donc $4(a + b - c + c^2) = 4ac$ ou (15) = (10).

2 可半之則半, divisant tout ce qui est divisible, simplifiant le plus possible.

Et multipliant les colonnes intérieures (i) l'une par l'autre et les colonnes extérieures de même (e) nous obtenons:

(i)

t
8
4

$$8x + 4x^2$$

(e)

t
0
2
1

$$x^3 + 2x^2$$

(r)

t
—8
—2
1

$$x^3 - 2x^2 - 8x.$$

Enfin égalant (i) à (e) et retranchant (i) de (e) il reste l'expression de l'équation finale (r) dont il faut extraire la racine. La racine cubique donne 4 pas, réponse exacte.

Problèmes à 3 inconnues 三才運元.

Si hypothén. — hauteur divisant hypoth. + hauteur + base, donne pour quotient le rectangle construit sur la base et la hauteur; et que hypoth. + hauteur — base divisées par hypothén. — base donne la base, trouver l'hypothénuse ?[1]

Réponse: 5 pas.

Solution. Posons *t'ien* = base, *ti* = hauteur; *jen* = hypoth. En combinant ces trois éléments, nous trouverons (*kin*), (*yun*), et (3 él.).

kin

0	—1	t	—1
—1	0_1	—1	0

$$-xy^2 + xyz - y - x - z$$

(*yun*)

—1	t	—1
0	1	1
0	—1	0

$$-y + x - x^2 - z + xz$$

(3 *él.*)

1	0	t	0	—1
		0		
		1		

$$y^2 + x^2 - z^2$$

1 Soit x = base, y = hauteur, z = hypothénuse, les données sont: $(x + y + z) : z - y = xy$; $(z + y - z) : z - x = x$.

(ant.)

1	1	—2t
—1	1	—1
0	1	2

$y^3 - y^2x + y + yx + yx^2 - 2$
$- x + 2x^2$

(cons.)

1	—2	2	t
0	—2	4	—2
0	0	1	—2

$y^3 - 2y^2 - 2y^2x + 2y + 4yx + yx^2$
$- 2x - 2x^2$

Solution détaillée de Hoang.

Posant: $x = c$, $y = b$, $z = a$, nous avons[1]: $y - x = b - c$; $(y - x) + z = a + (b - c)$ $z - x = (a - c)$ $z - y = a - b$; $x + y + + z = a + b + c$ $xy = cb$.

Et par suite $xy (z - y) - (x + y + z)^2$ (*Kin*)

(*kin*)

	—1	t	—1
—1	0	—1	0

$- xy^2 + xyz - y - x - z$

(1)

t	
0	1
—1	

$- x^2 + xz$

(*yun*)

—1	t	—1
	1	1
	—1	

$- y + x - x^2 - z + xz$ —

Puis $x (z - x)$ donne (1) qui égalé à $z + (y - x)$ donne (*yun*)[3]

Nous avons d'ailleurs l'équation des 3 côtés [3 él.]. De (*Kin*) et de (3 él.) nous tirons (2)

1 $c =$ base, $y =$ hauteur, $z =$ hypothénuse.

2 Première donnée du problème.

3 Seconde donnée du problème.

(3 *él.*)

1	0	t	0	—1
		0		
		1		

$y^2 + x^2 - z^2$

(2)

—1	t	—1	
	—1	0	—1
	0		
	1		

$- y - x + x^3 - z - xz^2$

(3)

	t	0	—1
	0	1	1
	0	—1	

$-zy - zx^2 + zx - z^2 + xz^2$

(4)

—1	t	—1	0
	—1	0	—2
	0	1	1
	1	—1	

$- y - x + x^3 - z + zx^2$
$- zx^3 + x^2z^2 - 2xz^2$

Multipliant par 2 l'expression (*yun*) nous obtenons (3) et de (2) et (3) nous tirons (4) .

Par (4) et (*yun*) nous trouvons (5) et en y échangeant les x et z il vient (*ant*)

(5)

t	0	0
—2	—1	—2
1	1	1
1	—1	0

$- 2x + x^2 + x^3 - xz + x^2z$
$- x^3z - 2xz^2 + x^2z^2$

(*ant.*)

1	1	—2t
—1	1	—1
0	1	—2

$y^2 - y^2x + y + yx + yx^2 - 2$
$- x - 2x^2$

Coupons (*yun*) en deux parties verticales, la partie droite au carré donnera (6) et sa partie gauche (7), d'où sortira (8) et de (8) par les (3 él) nous obtiendrons (9); par échange des z et des x, (9) deviendra la formule (*cons.*)

(6)

t	0	1
0	—2	—2
1	4	1
—2	—2	
1		

$$x^2 - 2x^3 + x^4 - 2xz + 4x^2z - 2x^3z + z^2 - 2xz^2 + x^2z^2$$

(7)

1	0	t

$$y^2$$

(8)

1	0	t	0	—1
		0	2	2
		—1	—4	—1
		2	2	0
		—1	0	0

(9)

t	0	0
0	—2	—2
2	4	1
	—2	

(*cons.*)

1	—2	2	t
	—2	4	—2
		1	—2

$$y^3 - 2y^3 - 2y^2x + 2y + 4yx + yx^2 - 2x - 2x^2$$

Multipliant (*cons.*) par la colonne gauche de (*ant.*) l'on trouve (10) qui égalé à (*ant.*) donne (11). L' (*ant.*) ajouté à (11) est égal à (12).

(10)

1	—2	2	t
—1	0	2	—2
	2	—3	0
		—1	2

$$y^3 - y^3x - 2y^2 + 2y^2x^2 + 2y + 2yx - 3yx^2 - yx^3 - 2x + 2x^3$$

(11)

—3	4	t
—1	3	—2
1	—1	0
	—1	2

$$-3y^2 - y^2x + y^2x^2 + 4y + 3yx - yx^2 - yx^3 - 2x + 2x^3$$

(12)

—3	4	t
	4	—4
		—1

$$-3y^2 + 4y + 4yx - 4x - x^2$$

Multipliant encore par la colonne gauche de (*ant.*) le (12) devient (13) et 3 fois l'*ant* donne (3 *ant*). Puis par (13) et (3 *ant.*) l'on trouve (*g*)[1].

(13)

—3	4	t
3	0	—4
	—4	3
		1

$$-3y^2 + 3y^2x + 4y - 4xy^2 - 4x + 3x^2 + x^3$$

(3 *ant.*)

3	3	—6t
—3	3	—3
	3	—6

$$3y^2 - 3y^2x + 3y + 3yx - 3yx^2 - 6 - 3x - 6x^2$$

(*g*)

7	—6
3	—7
—1	—3
	1

$$7y + 3yx - yx^2 - 6 - 7x - 3x^2 + x^3$$

Multiplions (*ant.*) par la colonne gauche de (*g*) nous trouvons (14) et multiplions de même (*g*) par la colonne gauche de (*ant.*) nous obtenons (15).

(14)

7	7	—14
—4	10	—13
—4	9	—15
1	2	—5
	—1	2

$$7y^2 - 4y^2x - 4y^2x + y^2x^3 + 7y + 10yx + 9yx^2 + 2yx^3 - 5x^3 - 14 - 13x - 15x^2 - yx^4 + 2x^4.$$

(15)

7	—6
—4	—1
—4	4
1	4
	—1

$$7y - 4yx - 4yx^2 + yx^3 - 6 - x + 4x^2 + 4x^3 - x^4.$$

(d)

13	—14
11	—13
5	—15
—2	—5
	2

$$13y + 11yx + 5yx^2 - 2yx^3 - 14 - 13x - 15x - 5x^3 + 2x^4.$$

1 Ici 消之 égalons et simplifions signifie ajoutons les 2 équations, de fait:

(13) $-3y^2 + 3y^2x + 4y - 4yx^2 \quad - yx + 3x^2 + x^3$

(3 ant.) $+3y^2 - 3y^2x + 3y + 3yx^2 + 3x \quad y - 6 - 3x - 6x^2$

(g) $+7y - yx^2 + 3x \quad y - 6 - 7x - 3x^2 + x^3.$

Par (14) et (15) nous obtenons (*d*). Plaçant (*g*) et (*d*) sur colonnes parallèles le produit des deux colonnes intérieures donne (*i*) et celui des extérieures (*e*)

(*g*)

7	—6
3	—7
—1	—3
0	1

(*d*)

13	—14
11	—13
5	—15
—2	—5
0	2

(*i*)

—78t
—157
—146
—43
10
11
—2

$-78-157x-146x^2-43x^3+10x^4+11x^5-2x^6$.

(*e*)

—98t
—133
—130
—67
14
11
—2

$-98-133x-130x^2-67x^3+14x^4+11x^5-2x^6$.

Égalant (i) à (e) simplifiant et divisant par 4 nous trouvons enfin l'expression dont il faut extraire la racine (r). La racine 4e donne 5 pas, réponse exacte.

(r)

—5
6
4
—6
1

soit $-5+6x+4x^2-6x^3+x^4$

$(n-5)(n+1)(n-1)^2$

Problème à 4 inconnues 四象會元

La hauteur multipliée par les 5 différences égale le carré de l'hypothénuse augmenté de la base multipliée par l'hypothénuse. On sait que le quotient des 5 sommes divisées par la base égale le carré de la hauteur diminué de la différence entre l'hypothénuse et la base. On demande la valeur du diamètre augmenté des 3 côtés?

Reponse: 14 pas[1].

Solution Originale. Prenons *T'ien* la base; *Ti* = la hauteur; *Jen* = l'hypothénuse; *Ou* = le nombre cherché.

Combinant dans les calculs ces 4 éléments, nous trouvons:

(*kin*)

—2	t	1
0	1	0

$-2y+x+z$

(*yun*)

0	4	t	4
—1	0	2	1
0	0	—1	0

$-xy^2+4y+2x-x^2+4z+xz$

(3 *él.*)

1	0	t	0	—1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0

$y^2+x^2-z^2$

(*ou*)

0	—1	0
2	t	0
0	2	0

$2y+2x-u$.

Les combinant, éliminant, coupant, et échangeant *t'ien* avec *ou*, il vient:[2]

(*ant*)

2	—8	28	t
0	—1	6	—2
0	0	0	—1

$2y^3-8y^2-xy^2+28y+6yx-x^2-2x$.

(*cons.*)

—7	t
0	2

$-7y+2x$

1 Les deux données sont donc $5db = a^2+ac$ $5s : c = b^2-(a-c)$. L'inconnue est $a+b+c+2r$; et comme $2r = b+c-a$, $a+b+c+2r = 2(b+c)$.

2 Remarquer la terminologie: formule des 3 éléments (3 él.) c'est le théorème

L'expression (*cons.*) sera mise *à gauche*.

Nous tirons des deux équations (*ant.*) et (*cons.*) l'expression (*d*)

(*cons.*)

—7	t
0	2

(*d*)

0	294
8	3
0	—4

$8xy - 4x^2 + 3x + 294.$

La multiplication des colonnes intérieures donne (*i*) et celle des colonnes extérieures (*e*). Soustrayant et divisant par 3 il reste (*r*.)

(*r*)

—686
—7
4

$-686 - 7x + 4x^2$

(*i*)

0
0
16

$16x^2$

(*e*)

—2058
—21
28

$-2058 - 21x + 28x^2$

Nous obtenons donc l'expression (*r*) dont il faut trouver la racine. La racine est 14, répons exacte.

Solution détaillée de Hoang[1].

Posons X = base; Y = hauteur; Z = hypothénuse; et U = nombre cherché.

(d_1) $Y - X$ est la différence entre la hauteur et la base.
(s_1) $Y + X$ est la somme de la hauteiur et de la base.
(d_2) $Z - X$ est la d. entre l'hypothénuse et la base.
(s_2) $Z + X$ est la s. de l'hypothénuse et de la base.
(d_3) $Z - Y$ est la d. entre l'hypothénuse et la base.
(s_3) $Z + Y$ est la somme de l'hypothénuse et de la base.
(d_4) $X - X - Z$ est la diff. entre les 2 côtés et l'hypothénuse.
(s_4) $X + Z + Y$ est la somme des 3 côtés.
(d_5) $Z + X - Y$ est la différence entre l'hypothénuse et $(Y - X)$.
(s_5) $Z + Y - X$ est la somme de l'hypothénuse et de $(Y - X)$.
2 Z est la somme des 5 différences.

de Pythagore $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; puis formule antécédente (*ant.*) et conséquente (*cons.*), antithèse chère à l'oreille chinoise.

1 J'ai traduit tout au long, pour bien montrer la mentalité de l'auteur chinois. Et puis aussi pour donner la liste des 5d et des 5s d'après une source chinoise.

Multipliant[1] les 5 d par la hauteur il vient (1) à gauche. La base par l'hypothénuse donne (2) en y ajoutant le carré de l'hypothénuse, on a (3). En soustrayant les équations (1) et (3) nous trouvons (4) qui divisé par l'hypothénuse donne (*kin*).

(1)

0_2	t
0	0

$2yz$

(2)

t	0
0	1

xz

(3)

t	0	1
0	1	

$xz + z^2$

(4)

—2	t	0	1
0	0	1	

$-2yz + xz + z^2$

(*kin*)

—2	t	1
	1	

$-2y + x + z.$

Le total des 5 sommes donne (5) et divisé par la base laisse (6) *à gauche*.

La quantité hauteur[2] — (hyp. — base) s'exprime par (7) qui retranché de (6) laisse (*yun*).

(5)

4	t	4
	2	

$4y + 2x + 4z$

(6)

4	0	4
	2t	

$\frac{4y}{x} + 2 + \frac{4x}{z}$

(7)

1	0	t	—1
		1	

$y^2 + x - z$

(*yun*)

0	4	t	4
—1	0	2	1
		—1	

$-xy^2 + 4y - x^2 + 2x + xz + 4z.$

1 Les 4 premières opérations qui simplifiées donnent l'expression (kin) sont l'expression simple et pure de la première donnée du problème:

Hauteur × 5d = hyp² + base × hyp.
y × 5d = z² + xz.

2 Pour arriver à la seconde équation (*yun*) la seconde donnée du problème est utilisée 5 sommes: base = hauteur² — (hyp. — base)
$4(z + y) + 2x : x = y^2 - z + x.$

On a d'ailleurs. l'expression[1] des 3 éléments (3 él.).

1	o	t	o	—1
		o		
		1		

$y^2 + x^2 - z^2$.

Comme $(x + y - z)$ est le diamètre du cercle inscrit dans le triangle rectangle, en y ajoutant les 3 côtés, on obtient (8) qui égalé à l'inconnue, d'après le procédé ordinaire, donne l'expression (u).

diamètre

1	t	—1
	1	

$y + x - z$

(8)

2	t
	2

$2y + 2x$

Si dans l'expression (u) nous échangeons les u et les x. (u) devient (u').

(u)

	—1	
2	t	o
	2	

$2y + 2x - u$

(u')

	2	
2	t	
	—1	

$2y + 2u - x$

Coupons par une barre horizontale l'équation (u') en deux parties, la partie supérieure mise au carré donne (9) et la partie inférieure au carré devient (10) d'ou l'on tire

(u)' coupé

	2	
2	t	
	—1	

$2y + 2u - x$

(9)

		4
	8	o
4	o	t

$4y^2 + 8yu + 4u^2$

(10)

t
o
1

x^2

1 L'auteur répète la construction des (3 él.) déja vue plus haut.

(11)

		—4
	—8	o
—4	o	t
	o	o
		1

$= -4y^2 - 8yu - 4u^2 + x^2$.

Reprenant les équations (*yun*) et (*kin*) nous multiplions (*kin*) tout entier par la colonne droite[1] de (*yun*) et nous obtenons (12) qui avec (*yun*) donne (13). Echangeant les éléments x et u (13) devient (14). En doublant (14) nous avons (15).

(12)

—8	t	4
—2	4	1
	1	

$-8y - 2yx + 4x + x^2 + 4z + xz$

(13)

o	—12	t
1	—2	2
		2

$xy^2 - 12y - 2xy + 2x + 2x^2$

(14)

		2
1	—2	2
o	—12	t

$uy^2 - 12y - 2uy + 2u + 2u^2$

(15)

		4
2	—4	4
o	—24	t

$2uy^2 - 24y - 4uy + 4u + 4u^2$

Ajoutant (11) et (15) nous trouvons (16), doublons l'équation (u') nous obtenons (2u') qui retranché de (16) laisse (17)

(16)

2	—12	4
—4	—24	t
		o
		1

$-4y^2 + 2y^2u - 24y - 12yu + x^2 + 4u$.

(2u')

	4	
4	t	o
	—2	

$4y + 4u - 2x$.

1 La colonne droite de (*yun*) est $4z + xz$ qui multipliant (*kin*) $= -2y + x + z$ donne bien le résultat indiqué.

(17)

2	—12	0
—4	—28	t
		2
		1

$$-4y^2 + 2y^2u - 12yu - 28y + 2x + x^2.$$

Éliminant de (17) les u par l'équation (u') y ajoutant (6u) nous trouvons (*ant.*).

(6u)

	12	0
12	t	0
	—6	

$$12y + 12u - 6x.$$

(*ant.*)

—2	8	—28	t
0	1	—6	2
0	0	0	1

$$-2y^3 + 8y^2 + xy^2 - 28y - 6yx + x^2 + 2x$$

Coupons l'équation (*kin*), en deux parties par un trait vertical, la partie de droite z fait au carré z^2, sa partie gauche $-2y + z$ fait au carré $(-2y + z)^2$.

(*kin*) coupé

—2	t	1
0	1	0

t	0	1

$(z)^2$

4	0	t
	—4	0
		1

$(-2y + z)^2$

De ces deux parties au carré nous tirons (18)

(18)

4	0	t	0	—1
	—4	0	0	
		1		

$$4y^2 - 4xy + x^2 - z^2$$

1 C'est la même équation que celle de l'original (*ant.*) mais tous les signes sont changés.

Par (18) et (3 *él.*) nous trouvons (19) qui devient (20) par l'échange des u et x; doublant (u) nous trouvons (2u) qui retranché de (20) laisse (*cons.*).

(19)

—3	t
	4

$$-3y + 4x$$

(20)

	4
—3	t

$$-4y + 4u$$

(2u)

	4	
4	t	0
	—2	

$$4y + 4u - 2x$$

(*cons.*)

—7	t
0	2

$$-7y + 2x.$$

Cette dernière égalité (*cons.*) sera mise *à gauche*. Par les deux équations (*ant.*) et (*cons.*) nous trouvons (21) en soustrayant (*ant.*) de (*cons.*). Puis multipliant (21) par la colonne droite de (*cons.*) il vient (22), d'où par élimination avec (*cons.*) il reste (23).

(21)

—2	8	—21	t
	1	—6	0
			1

$$-2y^3 + 8y^2 + xy^2 - 21y - 6xy + 2x^2.$$

(22)

—4	16	—42	t
	2	—12	0
		0	2

$$-4y^3 + 16y^2 + 2xy^2 - 42y - 12xy + 2x^2.$$

(23)

—4	16	—42
	2	—5

$$-4y^2 + 16y + 2xy - 42 - 5x.$$

Multiplions (*cons.*) par la colonne de droite dans (23). Ce qui produit (24), puis multiplions (23) par la droite de (*cons.*) ce qui produit (25) dont nous tirons par soustraction (26).

(24)

294	t
35	—84
	—10

$294y + 35yx - 84x - 10x^2$

(25)

—8	32	—84
	4	—10

$-8y^2 + 32y + 4xy - 84 - 10x.$

(26)

0	294
8	3
	—4

$8yx + 294 + 3x - 4x^2.$

Cette dernière égalité sera mise *à droite.*

Mettons (*cons.*) à gauche et (26) à droite, multiplions colonnes intérieures et extérieures, nous trouvons (*i*) et (*e*), soustrayant et divisant par 3 nous obtenons l'expression (*r*) de laquelle il faut extraire la racine carrée qui est 14, réponse exacte.

—7	t
0	2

0	294
8	3
	4

(*i*)

0
0
16

$16x^2$

(*e*)

—2058
—21
28

(*r*)

—686
—7
4

$-2058 - 21x + 28x^2$ ou $-686 - 7x + 4x^2.$